

13. Übungsblatt
Abgabe am 7.2.2019

1. Es seien $p_1, \dots, p_n$ die ersten n Primzahlen und $E = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$. Zeigen Sie:
 - i) $E/\mathbb{Q}$ ist galoissch mit $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.
 - ii) $\sqrt{p_1} + \dots + \sqrt{p_n}$ ist ein primitives Element von $E/\mathbb{Q}$. (4 P.)
2. Es sei G eine Gruppe der Ordnung 55 und X eine Menge mit 39 Elementen. Zeigen Sie, dass jede Operation von G auf X einen Fixpunkt, d.h. ein $x \in X$ mit $Gx = \{x\}$, besitzt. (4 P.)
3. Es sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Zeigen Sie:
 - i) Falls p ein Teiler von $\text{ord}(G)$ ist, so enthält G ein Element der Ordnung p .
 - ii) G ist genau dann eine p -Gruppe, falls es zu jedem $a \in G$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $a^{p^k} = 1$ gibt.
 - iii) Ist $H \subset G$ eine p -Untergruppe, die ein Normalteiler in G ist, so ist H in jeder p -Sylowgruppe von G enthalten.
 - iv) Ist G abelsch, so ist $S_p = \{a \in G \mid \text{es existiert ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } a^{p^k} = 1\}$ die einzige p -Sylowgruppe in G . (4 P.)
4. Es sei G eine Gruppe der Ordnung 45. Zeigen Sie, dass es in G eine Sylowgruppe gibt, die ein Normalteiler ist. (4 P.)