**Goethe-Universität Frankfurt**
**Institut für Mathematik**
Wintersemester 2018/19
7. Februar 2019

**Elementarmathematik I**
Dr. Alexander Ivanov
Dr. Jonathan Zachhuber

# Tutoriumsaufgaben zu Blatt 14

## Aufgabe 1

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge rationaler Zahlen mit (rationalem) Grenzwert $a \in \mathbb{Q}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in $\mathbb{Q}$. Sei zusätzlich die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $0 \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in den rationalen Zahlen konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

(b) Überprüfen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right)^k$$

konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

## Aufgabe 2

Wir nennen ein Dreieck gleichschenklig, wenn zwei der drei Dreiecksseiten die gleiche Länge besitzen.

Sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $A$, $B$ und $C$ gegeben. Zeigen Sie: Wenn die Mittelsenkrechte $m_{BC}$ auf der Strecke $\overline{BC}$ den Punkt $A$ schneidet, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

## Aufgabe 3

Geben Sie zwei rationale Cauchyfolgen an, die in der selben Äquivalenzklasse in $\mathbb{R}$ liegen.

## Aufgabe 4

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

(a) Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist wieder irrational.

(b) Die Abbildung $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $[a] \mapsto [2a]$ ist wohldefiniert.

(c) Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ ist $|x| = |y| \iff x^2 = y^2$.

(d) Das Polynom $\mathrm{i}X^2 - \mathrm{i} \in \mathbb{C}[X]$ hat keine reellen Nullstellen.

(e) Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$ ist surjektiv.

---

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.