Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
22. Oktober 2019

Lineare Algebra L2/L5
Dr. Jonathan Zachhuber
Martin Lüdtke

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 2

Aufgabe 1

(a) Stellen Sie die Matrix auf, die das LGS beschreibt:

$$\left\{\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

(b) Stellen Sie das inhomogene Gleichungssystem auf, das durch die erweiterte Matrix beschrieben wird:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Aufgabe 2

Überführen Sie die Matrix durch Gauß-Umformungen in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie dabei explizit die verwendeten Umformungsschritte $M_i(\lambda)$, V_{ij}, $E_{ij}(\lambda)$ an.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{A,0} \subseteq \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Geben Sie eine Permutation der Spalten an, welche die in Zeilenstufenform gegebene Matrix in spezielle Zeilenstufenform überführt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{1\,r+1} & c_{1\,r+2} & \cdots & c_{1\,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{2\,r+1} & c_{2\,r+2} & \cdots & c_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{r-1\,r+1} & c_{r-1\,r+2} & \cdots & c_{r-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r\,r+1} & c_{r\,r+2} & \cdots & c_{r\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

eine Matrix in spezieller Zeilenstufenform. Überprüfen Sie, dass alle Vektoren der Form

$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_{1\,r+1} \\ c_{2\,r+1} \\ \vdots \\ c_{r-1\,r+1} \\ c_{r\,r+1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{1\,r+2} \\ c_{2\,r+2} \\ \vdots \\ c_{r-1\,r+2} \\ c_{r\,r+2} \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} c_{1\,n} \\ c_{2\,n} \\ \vdots \\ c_{r-1\,n} \\ c_{r\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R},$$

Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ sind.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.