

Übungsblatt 2

Abgabe bis Donnerstag, 31.10.2019 um 12 Uhr

Aufgabe 1. (3 Punkte) Finden Sie eine 3×3 -Matrix $A \neq 0$ mit $A^2 \neq 0$, aber $A^3 = 0$. Hierbei bezeichnet 0 die 3×3 -Matrix, bei der alle Einträge gleich Null sind.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = b'$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Kann man die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Elementarmatrizen schreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Sei $A = (a_{ij})$ eine obere $n \times n$ -Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ii} = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $a_{ij} = 0$ für $i > j$. A hat also die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ & 1 & * & \dots & * \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A ein Produkt von Elementarmatrizen vom Typ I ist.

b.w.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Eine quadratische $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ heißt symmetrisch, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j . Beweisen Sie:

a) Sind A, B symmetrische $n \times n$ -Matrizen, so ist das Produkt AB genau dann symmetrisch, falls $AB = BA$.

b) Ist A eine symmetrische, invertierbare $n \times n$ -Matrix, so ist auch A^{-1} symmetrisch.

Hinweis: Betrachten Sie für $B = A^{-1} = (b_{ij})$ die Matrix $B^T = (b'_{ij})$ mit $b'_{ij} = b_{ji}$ für alle i, j .