Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
29. Oktober 2019

Lineare Algebra L2/L5
Dr. Jonathan Zachhuber
Martin Lüdtke

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 3

Aufgabe 1

Die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 \coloneqq 5, \qquad x_n \coloneqq 2x_{n-1} - 3 \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n = 2^n + 3.$$

Hinweis: Vollständige Induktion.

Aufgabe 2

Sei G eine abelsche Gruppe.

(a) Das Neutralelement $0 \in G$ ist dadurch definiert, dass $x + 0 = x$ für alle $x \in G$ gilt. Zeigen Sie, dass auch $0 + x = x$ für alle $x \in G$ gilt.

(b) Das Inverse $-x$ von $x \in G$ ist dadurch definiert, dass $x + (-x) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass auch $(-x) + x = 0$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass das Neutralelement $0 \in G$ eindeutig ist. Mit anderen Worten: Ist $0' \in G$ ein weiteres Neutralelement, dann gilt $0' = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass für $x \in G$ das Inverse $-x$ eindeutig ist. Mit anderen Worten: Ist $y \in G$ ein weiteres Inverses von x, dann gilt $y = -x$.

Aufgabe 3

Sei G eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass für $x, y \in G$ gilt:

$$-(x + y) = -x - y.$$

Hinweis: Für $a, b \in G$ schreiben wir $a - b \coloneqq a + (-b)$.

Aufgabe 4

Sei X eine Menge und bezeichne $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$ die Menge aller Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$. Auf $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$ werden „punktweise" Verknüpfungen definiert:

$$+ : \mathrm{Abb}(X,\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(X,\mathbb{R}), \quad (f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x),$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{Abb}(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(X,\mathbb{R}), \quad (\lambda \cdot f)(x) \coloneqq \lambda \cdot f(x).$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$ mit diesen Verknüpfungen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.