

Übungsblatt 3

Abgabe bis Donnerstag, 7.11.2019 um 12 Uhr

Aufgabe 1. (3 Punkte) Für eine natürliche Zahl n sei A eine $n \times n$ -Matrix, so dass $AB = BA$ für alle $n \times n$ -Matrizen B . Zeigen Sie, dass $A = \alpha E_n$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Es sei A eine $n \times n$ -Matrix für ein $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

- a) Gibt es für ein $m \in \mathbb{N}$ eine $n \times m$ -Matrix B mit $B \neq 0$ aber $AB = 0$, so ist A nicht invertierbar.
- b) Ist $A^2 = A$, dann gilt $A^k = A$ für alle natürlichen Zahlen k .
- c) Bestimmen Sie alle 2×2 -Matrizen A der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $A^2 = A$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

- a) Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen die inversen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -10 & -7 \\ 6 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

- b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ invertierbar? Bestimmen Sie für solche a die Matrix A^{-1} .

b.w.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme durch Anwenden des Gauß'schen Eliminationsverfahrens.

a)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \\3x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 8\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 0 \\-x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 0 \\4x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$