

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $(1, a)$ und $(1, b)$ im \mathbb{R}^2 genau dann linear unabhängig sind, wenn $a \neq b$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Im \mathbb{R}^5 seien folgende Vektoren gegeben:

$$v_1 = (3, 1, -2, -1, 5),$$

$$v_2 = (-4, 2, 4, 2, -3),$$

$$v_3 = (1, 2, 6, 3, 1),$$

$$v_4 = (-9, 7, -2, -1, 1).$$

Untersuchen Sie, ob die Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der \mathbb{R} -Vektorraum der reellen Folgen (vgl. Blatt 3, Aufgabe 3). Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$e_i := (\dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

diejenige Folge, deren i -ter Eintrag gleich 1 und alle anderen Einträge gleich 0 sind.

- (a) Zeigen Sie, dass $\{e_1, e_2, \dots\}$ linear unabhängig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\{e_1, e_2, \dots\}$ kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Eine *maximale linear unabhängige Teilmenge* von V ist eine linear unabhängige Teilmenge $M \subseteq V$, so dass jede echt größere Teilmenge $M' \supsetneq M$ von V linear abhängig ist. Zeigen Sie, dass für eine Teilmenge $M \subseteq V$ äquivalent sind:

- (i) M ist maximale linear unabhängige Teilmenge;
- (ii) M ist eine Basis.

Zusatzaufgabe

Finden Sie 6 Begriffe aus der Vorlesung und stellen Sie sicher, dass Sie alle Begriffe definieren und verwenden können.

L	D	R	N	G	M	B	X	W	P	U	N	V	I	Y	V	Q	K
I	V	K	I	Z	N	P	B	L	P	S	H	A	E	N	P	N	J
N	X	Z	W	B	O	T	K	I	Y	B	G	G	L	O	W	A	X
E	T	G	S	B	S	C	S	I	S	I	A	A	B	E	B	Y	B
A	F	Q	M	T	V	Q	N	P	Z	A	F	S	F	F	D	L	L
R	I	R	K	B	F	F	A	K	Z	O	V	I	I	C	N	U	J
U	B	N	K	B	L	G	G	X	T	D	J	Y	R	S	K	C	L
N	B	D	J	L	A	I	V	I	R	T	T	H	C	I	N	N	D
A	N	X	B	V	R	N	E	M	X	Y	P	R	B	E	O	T	G
B	K	Z	S	T	A	N	D	A	R	D	B	A	S	I	S	I	K
H	D	L	L	H	G	Q	C	W	L	K	P	K	C	C	D	H	L
A	P	B	W	B	H	S	D	Q	B	B	B	I	X	P	L	Z	Z
E	K	N	F	D	P	V	G	E	E	L	G	P	T	A	E	I	E
N	K	K	K	N	L	V	X	L	M	Y	X	D	H	A	O	K	Z
G	E	V	Y	V	Z	M	G	M	Z	S	E	N	V	Y	B	P	H
I	T	V	T	C	C	F	K	X	F	Q	O	C	N	E	E	J	C
G	W	P	R	O	P	O	R	T	I	O	N	A	L	C	P	E	K
E	R	Z	E	U	G	E	N	D	E	N	S	Y	S	T	E	M	T

Abgabe bis 10:00 am Dienstag, den 19. November in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.