

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) v_1, \dots, v_n bilden eine Basis von V ;
- (ii) v_1, \dots, v_n bilden ein Erzeugendensystem von V ;
- (iii) v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Im \mathbb{R}^3 seien folgende Vektoren gegeben:

$$\begin{aligned}b_1 &= (1, 3, -2), \\b_2 &= (0, 5, 1), \\b_3 &= (2, -3, -7).\end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 eine Basis B von \mathbb{R}^3 bilden.
- (b) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $D_B(v)$ des Vektors $v = (2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis B .

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

- (a) $\dim(U) \leq \dim(V)$;
- (b) $\dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper.

- (a) Sei V ein K -Vektorraum und $a \in K$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : V \rightarrow V, \quad f(v) = av$$

linear ist.

- (b) Wir fassen K als Vektorraum über sich selbst auf. Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung $f : K \rightarrow K$ von der Form $f(v) = av$ für ein $a \in K$ ist.

Zusatzaufgabe

Finden Sie die angegebenen 6 Begriffe aus der Vorlesung und stellen Sie sicher, dass Sie alle Begriffe definieren und verwenden können.

M	Y	R	B	F	U	I	W	P	B	A	K	W	G	Y	E	Y
S	A	O	O	J	W	R	Q	A	T	D	F	E	L	U	G	F
G	C	T	R	H	J	K	N	G	S	X	Q	R	P	B	Y	K
D	N	K	R	X	Z	X	O	L	Q	M	M	B	E	C	H	E
I	Y	E	Y	I	T	M	L	M	T	C	V	A	L	I	O	S
M	V	V	R	J	X	H	I	I	P	L	S	K	Q	Z	S	U
E	V	N	M	I	F	T	F	M	C	L	R	M	R	P	Y	Q
N	S	E	X	Y	M	E	V	Y	T	R	E	O	Y	S	I	D
S	I	T	Z	J	Y	J	Q	S	J	V	T	M	W	Y	G	E
I	Q	L	W	C	B	Z	X	X	J	S	H	Y	E	W	G	A
O	A	A	D	E	N	L	M	J	M	Z	T	U	N	N	D	X
N	H	P	P	L	U	A	R	W	A	N	V	Y	Q	Q	T	U
D	B	S	X	W	I	W	Z	Z	O	F	C	N	W	N	B	T
L	I	N	E	A	R	E	A	B	B	I	L	D	U	N	G	U
D	P	R	V	S	I	L	U	V	D	S	M	V	G	E	I	M
X	S	X	F	E	V	T	X	U	S	S	N	U	B	O	K	R
Q	U	A	D	R	A	T	I	S	C	H	H	F	M	X	L	R

DIMENSION
KOMPLEMENT
LINEAREABBILDUNG
MATRIX
QUADRATISCH
SPALTENVEKTOR

Abgabe bis 10:00 am Dienstag, den 26. November in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.