

Übungsblatt 5

Abgabe bis Donnerstag, 21.11.2019 um 12 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte) Für eine natürliche Zahl n sei A eine $n \times n$ -Matrix.

- a) Bestimmen Sie alle Werte, die $\det A$ annehmen kann, wenn $A^m = E_n$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
- b) Bestimmen Sie alle Werte, die $\det A$ annehmen kann, wenn $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dabei bezeichnet 0 die Nullmatrix.
- c) Es sei $\det A \neq 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\det(mA)/\det A$ nicht von A abhängt.
- d) Es sei σ eine Permutation aus $\mathcal{S}_n$. Berechnen Sie die Determinante von A im Fall $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma(j) \neq i \\ i & \text{für } \sigma(j) = i. \end{cases}$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) Betrachten Sie die folgenden $(n+m) \times (n+m)$ -Blockmatrizen über $\mathbb{R}$, die durch

$$M_1 := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

definiert sind, wobei $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- a) Zeigen Sie:

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 M_2 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{pmatrix}.$$

b.w.

Abgabe durch **Einwurf** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

b) Betrachten Sie die folgende $(n+m) \times (n+m)$ -Blockmatrix über $\mathbb{R}$:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Nullmatrix ist. Beweisen Sie, dass

$$\det(M) = \det(A) \det(D).$$

Aufgabe 3. (4 Punkte) Es sei A eine $n \times n$ -Matrix über $\mathbb{R}$ und A^t die zugehörige transponierte Matrix. Die Matrix A heißt symmetrisch, wenn $A^t = A$, und schiefsymmetrisch, wenn $A^t = -A$. Zeigen Sie:

a) Jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann man schreiben als

$$A = S + T,$$

wobei S eine symmetrische und T eine schiefsymmetrische Matrix ist.

b) Ist n ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, dann ist $\det(A) = 0$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Betrachten Sie die folgenden Permutationen $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_6$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Permutationen $\sigma_1\sigma_2$ und $\sigma_2\sigma_1$.

b) Schreiben Sie σ_1 und σ_2 jeweils als Produkt von Transpositionen.

c) Geben Sie die entsprechenden Permutationsmatrizen P_{σ_1} und P_{σ_2} an.

d) Kann man σ_2 als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.