

Übungsblatt 6

Abgabe bis Donnerstag, 28.11.2019 um 12 Uhr

Aufgabe 1. (3 Punkte) Es sei A die 3×3 -Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A .
- b) Bestimmen Sie die Adjungierte von A .
- c) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, und bestimmen Sie mit der Cramerschen Regel die inverse Matrix von A .

Aufgabe 2. (6 Punkte) Es seien $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ invertierbare Matrizen und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- a) $\text{Adj}(cA) = c^{n-1} \text{Adj}(A)$.
- b) $\text{Adj}(A^t) = \text{Adj}(A)^t$.
- c) $\text{Adj}(AB) = \text{Adj}(B) \text{Adj}(A)$.
- d) $\det(\text{Adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.
- e) $\text{Adj}(\text{Adj}(A)) = \det(A)^{n-2} A$.
- f) $\text{Adj}(A)^{-1} = \text{Adj}(A^{-1})$.

b.w.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die Menge aller $n \times n$ -Matrizen A über $\mathbb{R}$ mit $\det A = 1$ mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung und E_n als neutralem Element eine Gruppe ist.
- b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 3$ die Gruppe $\mathcal{S}_n$ nicht kommutativ ist.
- c) Es sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe von G . Zeigen Sie, dass für $h \in H$ und $g \in G$ das Element hg genau dann ein Element von H ist, wenn g ein Element von H ist.
- d) Es sei $(H_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen einer Gruppe G . Beweisen Sie, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} H_i = \{h \in G : h \in H_i \text{ für alle } i \in I\}$$

eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Es sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe von G .

- a) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Teilmenge

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\} \subset G$$

eine Untergruppe von G ist.

- b) Geben Sie ein $\sigma \in \mathcal{S}_3$ und eine Untergruppe $H \subset \mathcal{S}_3$ an, so dass:

$$\sigma H \sigma^{-1} \neq H.$$

- c) Es seien H_1, H_2 Untergruppen von G und für alle $g \in G$ gelte: $gH_2g^{-1} = H_2$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$H_1H_2 = \{h_1h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$$

eine Untergruppe von G ist.