Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
26. November 2019

Lineare Algebra L2/L5
Dr. Jonathan Zachhuber
Martin Lüdtke

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 7

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Sei $B = (b_1, b_2)$ die Basis von $\mathbb{R}^2$ bestehend aus

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $D_{BB}(f)$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$. Seien E und E' die Standardbasen von K^n bzw. K^m.

Zeigen Sie, dass die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$K^n \to K^m, \quad x \mapsto Ax$$

bezüglich E und E' gleich A ist.

Aufgabe 3

Seien V und W zwei K-Vektorräume und $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem. Seien $f, g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen, die auf E übereinstimmen, d. h. es gilt $f(a) = g(a)$ für alle $a \in E$.

Zeigen Sie: $f = g$.

Aufgabe 4

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

(a) $f(0) = 0$;

(b) f ist injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.