

Übungsblatt 7

Abgabe bis Donnerstag, 05.12.2019 um 12 Uhr

Aufgabe 1. (3 Punkte)

- a) Es sei $d \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $d\mathbb{Z}$.
- b) Bestimmen Sie alle Untergruppen H von $(\mathbb{Z}, +)$, die $20\mathbb{Z}$ als Untergruppe enthalten.
- c) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}$ keine echten Teilkörper besitzt.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Betrachten Sie die folgende Teilmenge K der quadratischen Matrizen $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass K bezüglich Matrizenaddition und -multiplikation ein Körper ist.
- b) Was ist die Charakteristik von K ?
- c) Zeigen Sie, dass es ein $X \in K$ gibt, so dass die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ erfüllt ist.
- d) Zeigen Sie, dass die Teilmengen

$$K_{\mathbb{R}} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } K_{\mathbb{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\}$$

Teilkörper von K sind.

b.w.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Es seien $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Zeigen Sie:

a) Für alle $x, y \in \mathbb{F}_p$ gilt $(x + y)^p = x^p + y^p$.

b) Folgern Sie: Für alle $x \in \mathbb{F}_p$ gilt $x^p = x$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Es sei $p > 2$ eine Primzahl.

a) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen n mit $n^2 = kp + 1$ für eine ganze Zahl k .

b) Beweisen Sie: Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $(p - 1)! = kp - 1$.