Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
3. Dezember 2019

Lineare Algebra L2/L5
Dr. Jonathan Zachhuber
Martin Lüdtke

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist bijektiv;

(ii) f ist surjektiv;

(iii) f ist injektiv.

Hinweis: Benutzen Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -9 & -3 & 8 & 1 & -10 \\ 3 & 3 & -3 & -2 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von f.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass es Basen B von V und C von W gibt, so dass die Abbildungsmatrix von f bezüglich B und C die Gestalt

$$D_{CB}(f) = \begin{pmatrix} 0 & E_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $r = \mathrm{Rang}(f)$ hat.

Hinweis: Betrachten Sie den Beweis des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $f : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung von endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.

Zeigen Sie, dass $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ eine Basis von W ist.

Abgabe bis **10:00** am **Dienstag, den 10. Dezember** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.