Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
3. Dezember 2019

Lineare Algebra L2/L5
Dr. Jonathan Zachhuber
Martin Lüdtke

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 8

Aufgabe 1

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ nicht beide 0. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

den Rang 2 hat.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{Ker}(f)$ und den Rang von f.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper. Wir definieren folgende 2×2-Matrizen mit Einträgen in K:

(i) $M_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $\lambda \in K \setminus \{0\}$,

(ii) $V_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(iii) $E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $\lambda \in K$.

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \in K^{2\times n}$$

eine Matrix mit zwei Zeilen. Berechnen Sie die Produkte $M_1(\lambda)A$, $V_{12}A$, $E_{12}(\lambda)A$.

(b) Eine quadratische Matrix $B \in K^{m\times m}$ heißt *invertierbar*, wenn eine Matrix $C \in K^{m\times m}$ existiert, so dass $BC = E_m$ und $CB = E_m$ gilt. Zeigen Sie, dass die Matrizen (i)–(iii) invertierbar sind.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.