

Übungsblatt 8

Abgabe bis Donnerstag, 12.12.2019 um 12 Uhr
bei den Schließfächern im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Zur Erinnerung, im Skript haben wir einen Körper als ein Tupel $(K, +, \cdot)$ definiert, für das die Körperaxiome erfüllt sind (Skript, Def. 4.9 oder Def. 4.9'):

1. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.
3. Es gelten die Distributivgesetze (Definition 4.9.ix).

Hierbei bezeichnet 0 *das* neutrale Element der Gruppe $(K, +)$.

Aufgabe 1. (1 Punkt) Zeigen Sie, dass eine beliebige Gruppe $(G, \cdot)$ ein eindeutig bestimmtes *neutrales Element* besitzt.¹

Zum Beispiel bilden die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ hingegen sind kein Körper. Zum Beispiel ist $2 \neq 0$, aber 2 hat kein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}$. Die ganzen Zahlen sind das Paradebeispiel für Ringe: Ein Ring ist ein Tupel $(R, +, \cdot)$, wobei R eine Menge und $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ Abbildungen sind, sodass die Ringaxiome erfüllt werden:

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(R, \cdot)$ ist ein kommutativer Monoid, d. h. es gelten
 - Assoziativität: $a(bc) = (ab)c$ für alle $a, b, c \in R$,
 - Kommutativität: $ab = ba$ für alle $a, b \in R$,
 - Neutrales Element: es existiert $1 \in R$ mit $1a = a = a1$ für alle $a \in R$.

3. Es gelten die Distributivgesetze (Definition 4.9.ix).

Ein Körper ist also insbesondere ein Ring; es gelten in einem Körper nur zusätzlich, dass $1 \neq 0$ und dass jedes Element $x \neq 0$ ein multiplikatives Inverses hat.

¹Mit der Annahme, dass das neutrale Element eindeutig ist, wurde im Skript bereits gezeigt, dass Inverse eindeutig bestimmt sind. Wenn Inverse oder neutrale Elemente nicht eindeutig wären, würden wir sie explizit in der Struktur festlegen müssen: $(G, \cdot, e, \cdot^{-1})$.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass $R := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$ definiert durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

kein Körper ist. Welche Axiome werden (bzw. welches Axiom wird) nicht erfüllt? Zeigen Sie, dass es ein Ring ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Zur Erinnerung, Sie sollten folgende Eigenschaften für Körper nachprüfen (Skript, S.51,52):

1. $0a = a0 = 0$,

2. $(-1)a = -a$,

3. Ist $ab = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$,

4. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Welche dieser Eigenschaften gelten auch für Ringe, d. h. für welche Eigenschaften braucht man die Existenz von multiplikativen Inversen nicht? Geben Sie für die anderen Fälle Beispiele an, wo die Eigenschaft schief geht.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie für die folgenden Mengen $M \subseteq V$ die linearen Hüllen:

1. $M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$,

4. $M = V \setminus \{0\}$,

2. $M = \emptyset$,

5. $M = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{Q} \right\}$.

3. $M = \{0\}$,

Aufgabe 5. (7 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$. Sind die folgenden (geordneten Mengen von) Vektoren linear abhängig oder unabhängig?

1. $((1, 0, 0)^t)$,

5. $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, wobei $v_i \in V$ beliebig sind,

2. $((1, 0, 0)^t, (-1, 0, 0)^t)$,

6. (0) ,

3. $((1, 0, 0)^t, (-1, 1, 0)^t)$,

4. $((1, 2, 3)^t, (2, 3, 1)^t, (3, 2, 1)^t)$,

7. $(0, (1, 0, 0)^t)$.