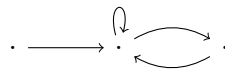


Übungsblatt 9

Abgabe bis Donnerstag, 19.12.2019 um 12 Uhr
bei den Schließfächern im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ bestehend aus einer Menge $\mathcal{V}$ von Knoten (engl. “vertices”) und einer Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ von Kanten (engl. “edges”). Wenn $\mathcal{V}$ (und insb. $\mathcal{E}$) endlich ist, können wir so einen Graphen (prinzipiell) graphisch darstellen. Dazu ordnen wir den Knoten $v \in \mathcal{V}$ (verschiedene) Punkte zu und repräsentieren eine Kante $e = (v, w) \in \mathcal{E}$ durch einen Pfeil von v nach w (bzw. den zu v und w zugeordneten Punkten). Hier ist ein Beispiel, wie so etwas dann aussehen könnte:



Aufgabe 1. (6 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum $V = \mathbb{F}_2^3$. Sei

$$\mathcal{V} = \{U \subseteq V \mid U \text{ ist Untervektorraum von } V\}$$

die Menge der Untervektorräume von V . Weiter Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ die Menge

$$\mathcal{E} = \{(U, U') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mid U \subseteq U'\}.$$

In dem Graphen $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ gibt es also genau dann eine Kante von U nach U' , wenn $U \subseteq U'$ gilt.

1. Zeichnen Sie diesen Graphen und beschriften Sie die Knoten, indem Sie einen Untervektorraum U als lineare Hülle von linear unabhängigen Vektoren schreiben¹. Also zum Beispiel für $U = V$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Berechnen Sie für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der i -dimensionalen Untervektorräume.

¹Vorsicht: Aufgepasst mit $U = 0$.

3. Der Schnitt zweier Untervektorräume $U \cap U'$ ist wieder ein Untervektorraum. Finden Sie $U \cap U'$ im Graphen.
4. Die Vereinigung $M = U \cup U'$ ist im Allgemeinen kein Untervektorraum. Finden Sie dafür ein Beispiel. Nach Satz 5.7 im Skript ist $\langle M \rangle$ der kleinste Untervektorraum, der M enthält. Finden Sie $\langle M \rangle$ im Graphen.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Seien K ein Körper und $K^{n \times n}$ der K -Vektorraum aller $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in K .

1. Für welche der folgenden Teilmengen M

$$\text{Sym}(n, K) := \{A \in K^{n \times n} \mid A^t = A\} \subseteq K^{n \times n}$$

$$\text{Alt}(n, K) := \{A \in K^{n \times n} \mid A^t = -A\} \subseteq K^{n \times n}$$

$$\text{GL}(n, K) := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq K^{n \times n}$$

$$\text{O}(n, K) := \{A \in \text{GL}(n, K) \mid A^t = A^{-1}\} \subseteq K^{n \times n}$$

lassen sich Addition und Skalarmultiplikation von $K^{n \times n}$ auf diese M einschränken? Nach Lemma 5.4 (Skript) erhält M dann die Struktur eines Untervektorraums von $K^{n \times n}$.

2. Finden Sie für diese Untervektorräume jeweils eine Basis und berechnen Sie ihre Dimensionen.
3. Auf welche der Teilmengen M aus 1. lässt sich die Matrixmultiplikation $\cdot : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K^{n \times n}$ einschränken? Überprüfen Sie für diese Fälle, ob $(M, \cdot)$ eine Gruppe ist². Wenn ja, ist die Gruppe abelsch?

Aufgabe 3. (6 Punkte) Wir haben bereits die endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ kennengelernt (p prim). Die Abbildung (S. 53 im Skript)

$$\bar{\cdot} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p, a \mapsto \bar{a}$$

bildet $a \in \mathbb{Z}$ auf den Rest bei Division durch p ab.

1. Zeigen Sie, dass $\bar{\cdot}$ ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{F}_p, +)$ ist, d. h. es gilt $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.
2. Zeigen Sie, dass es sogar ein Ringhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{F}_p, +, \cdot)$ ist, d. h. es gelten $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ und $\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $\bar{1} = 1$.

Sei nun $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit Einträgen in $\mathbb{Z}$, d. h. $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Dann können wir $\bar{\cdot}$ auf die Einträge von A anwenden und erhalten eine Matrix $\bar{A} \in \mathbb{F}_p^{n \times n}$.

3. Zeigen Sie, dass die Determinante von A in $\mathbb{Z}$ ist: $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
4. Für welche Primzahlen p ist $\bar{A}$ invertierbar, d. h. $\bar{A} \in \text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$? Kann die Menge solcher Primzahlen unendlich sein?

²Evtl. wollen Sie die Inverse zu einer Matrix der Form A^t berechnen, wenn A invertierbar ist. Sie können versuchen $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ zu zeigen. Hierzu könnten zum Beispiel Korollar 3.32 und Satz 3.19 im Skript hilfreich sein.