Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
17. Dezember 2019

Lineare Algebra L2/L5
Dr. Jonathan Zachhuber
Martin Lüdtke

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 14 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

hat die Eigenwerte 2 und 3. Bestimmen Sie jeweils einen zugehörigen Eigenvektor.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $E = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und sei $B = (b_1, b_2)$ die Basis bestehend aus

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen

$$D_{EB}(\mathrm{id}) \quad \text{und} \quad D_{BE}(\mathrm{id}).$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Endomorphismus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -10x + 6y \\ -18x + 11y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass b_1 und b_2 Eigenvektoren von f sind, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte. Was bedeutet das für die Abbildungsmatrix $D_{BB}(f)$?

(c) Bezeichne $f^{12} = f \circ \ldots \circ f$ die 12-fache Hintereinanderausführung von f. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{BB}(f^{12})$ und $D_{EE}(f^{12})$ und berechnen Sie $f^{12}(e_1)$.

Hinweis: Es gilt $2^{12} = 4096$; damit benötigen Sie keinen Taschenrechner.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sei $\mathrm{GL}_n(K) \subseteq K^{n\times n}$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K. Zeigen Sie:

(i) $E_n \in \mathrm{GL}_n(K)$;

(ii) $S \in \mathrm{GL}_n(K) \Rightarrow S^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$;

(iii) $S, T \in \mathrm{GL}_n(K) \Rightarrow S \cdot T \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(b) Zeigen Sie, dass Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$ ist.

Weihnachtsaufgabe (4 Bonuspunkte)

Wir haben 3 Rezepte für Weihnachtskekse. Für ein Blech Kekse werden die folgenden Zutaten benötigt:

	Eier	Mehl	Zucker
Rezept A	3	0,8 kg	0,4 kg
Rezept B	2	0,5 kg	0,5 kg
Rezept C	4	1 kg	0,6 kg

Wir haben 202 Eier, 52 kg Mehl und 34 kg Zucker vorrätig, die wir vollständig aufbrauchen wollen. Wie viele Bleche müssen wir nach welchem Rezept backen?

Abgabe bis **10:00** am **Dienstag, den 14. Januar 2020** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.