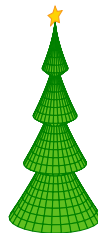


Übungsblatt 10

Abgabe bis Donnerstag, 16.01.2020 um 12 Uhr
bei den Schließfächern im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.



Aufgabe 1. (2 Punkte) Sie haben in der Vorlesung den unendlich dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^\infty$ der Folgen in $\mathbb{R}$ kennengelernt. Als Menge ist $\mathbb{R}^\infty$ also die Menge der Abbildungen $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Gibt es einen echten Untervektorraum $U \subsetneq \mathbb{R}^\infty$ mit $\dim U = \infty$? Hinweis: Wenn Sie auf keine Lösung kommen, machen Sie erstmal die nächste Aufgabe...

Aufgabe 2. (30 Punkte) Die Konstruktion von $\mathbb{R}^\infty$ können wir verallgemeinern: sei K ein beliebiger Körper und N eine beliebige Menge. Sei K^N die Menge der Abbildungen $N \rightarrow K$.

1. Definieren Sie eine K -Vektorraumstruktur auf K^N .
2. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $K^{\{\clubsuit, \spadesuit, \star\}}$ und K^3 an.

Wir betrachten nun den Fall $N = \mathbb{N}_0$ und schreiben $K^\infty := K^{\mathbb{N}_0}$. Wir definieren nun eine Ringstruktur auf K^∞ wie folgt:

$$(a_i)_i \cdot (b_j)_j := \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right)_k. \quad (1)$$

3. Zeigen Sie, dass $(K^\infty, +, \cdot)$ ein Ring ist. Was sind die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation?

Wir definieren $X := (0, 1, 0, \dots) \in K^\infty$ und $K[X] := \langle \{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} \rangle \subseteq K^\infty$, also die lineare Hülle der Vektoren X^i , $i \in \mathbb{N}_0$ in K^∞ .

4. Zeigen Sie, dass sich die Ringmultiplikation von K^∞ auf $K[X]$ einschränken lässt und, dass das $K[X]$ auch zu einem Ring macht, dem sog. Polynomring über K in der Variablen X .
5. Zeigen Sie, dass die Einbettung $K \hookrightarrow K[X]$ bzw. $K \hookrightarrow K^\infty$, definiert durch $c \mapsto cX^0$ sowohl Ring- als auch Vektorraumhomomorphismen sind.

Elemente $f \in K[X]$ (genannt Polynome) sind nach Definition Linearkombinationen der X^i , $i \in \mathbb{N}_0$, d. h. $f = f_0 + f_1X + f_2X^2 + \dots + f_rX^r$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $f_i \in K$, $0 \leq i \leq r$. Der Grad eines Polynoms f ist $\deg(f) := \max\{i \mid f_i \neq 0\}$. Wir definieren den Vektorraum der Grad d Polynome als

$$K[X]_d := \langle \{X^0, X^1, \dots, X^d\} \rangle. \quad (2)$$

6. Zeigen Sie, dass $X^0, \dots, X^d \in K[X]_d$ linear unabhängig sind und dass $B_n := (X^0, \dots, X^d)$ eine Basis von $K[X]_d$ ist.

7. Welche Dimension hat $K[X]_d$?

8. Finden Sie eine Basis für $K[X]$.

Polynome $f = f_0 + f_1X + f_2X^2 + \dots + f_rX^r \in K[X]$ haben gegenüber beliebigen Elementen in K^∞ die Besonderheit, dass der Ausdruck $f(x) := f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots + f_rx^r \in K$ für $x \in K$ sinnvoll ist.

9. Sei $x \in K$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} K[X] &\rightarrow K \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung von K -Vektorräumen ist.

10. Sei $x \in K$. Zeigen Sie, dass es auch ein Ringhomomorphismus ist, d. h. es gelten

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \\ 1(x) &= 1. \end{aligned}$$

Wir hätten gerne eine lineare Abbildung $D : K[X] \rightarrow K[X]$ mit $D(X^i) = iX^{i-1}$, $i \geq 0$.¹

11. Finden Sie ein solches D .

Wir betrachten die sogenannten Bernsteinpolynome für $0 \leq i \leq n$:

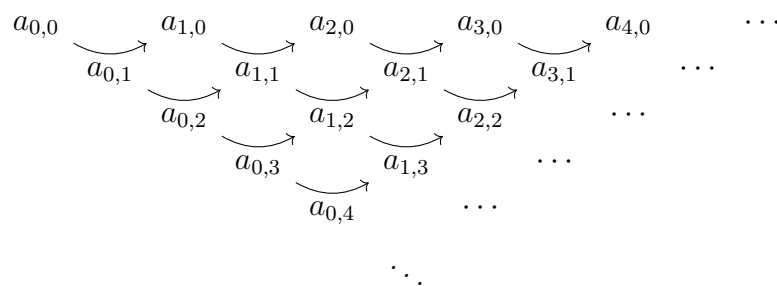
$$b_{i,n} := \binom{n}{i} X^i (1-X)^{n-i} \in K[X]_n. \quad (3)$$

Für die folgenden fünf Teilaufgaben nehmen wir an, dass die Charakteristik von K gleich 0 ist.

¹Man nennt $D(f)$ auch die *formale Ableitung* von f . Im nächsten Jahr werden Sie lernen (Proposition 6.5), dass aus Linearität und der Beschreibung von D auf Basisvektoren ($D(X^i) = iX^{i-1}$) folgt, dass es *genau ein* solches D gibt.

12. Zeigen Sie, dass $b_{i,n}$, $0 \leq i \leq n$ eine Basis $C_n := (b_{0,n}, \dots, b_{n,n})$ für $K[X]_n$ definiert. Tipp: sei $S := \sum_i a_i b_{i,n} = 0$ mit $a_i \in K$, $0 \leq i \leq n$ eine Linearkombination der Null. Aus $S(0) = 0$ folgt $a_0 = 0$, aus $D(S)(0) = 0$ folgt $a_1 = 0$, etc.
13. Berechnen Sie für $n = 2$ die Übergangsmatrix $P_{C_n}^{B_n}$ und dessen Inverse und vergleichen Sie diese mit $P_{B_n}^{C_n}$.
14. Sei $n = p$ eine Primzahl. Können Sie anhand von (3) schon ablesen, dass $\det(P_{C_p}^{B_p}) \in p\mathbb{Z}$? Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 3.3 von Blatt 9.
15. Geben Sie die Koordinatenvektoren von $f = 1 - X + X^2 \in K[X]_2$ bzgl. der Basis C_2 und der Basis B_2 an.
16. Geben Sie die Koordinatenvektoren von $f = 1 - X + X^2 \in K[X]_3$ bzgl. der Basis C_3 und der Basis B_3 an.
17. Finden Sie einen Körper und ein $n \geq 0$, sodass die Bernsteinpolynome nicht linear unabhängig sind.
18. Finden Sie einen Untervektorraum U mit $K[X] \subsetneq U \subsetneq K^\infty$. Hinweis: Sie können die Aufgabe lösen, indem Sie ein Element $f \notin K[X]$ finden.
19. Finden Sie ein solches U und ein V mit $K^\infty = U \oplus V$ und $\dim V = 1$. Hinweis: Korollar 5.37 können Sie nicht anwenden; aber vielleicht ein Satz für dessen Beweis wir das Zorn'sche Lemma benötigt haben.

Aufgabe 3. (Weihnachtsaufgabe: 10 Bonuspunkte)² Sei K ein Körper. Wir betrachten Elemente $a_{i,j} \in V$ in einem K -Vektorraum V , die die Gleichungen $a_{i,j+1} = a_{i+1,j} - a_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}_0$ erfüllen. Wir schreiben das wie folgt in einem Diagramm auf:



Sei $B := (a_{i,0})_{i \in \mathbb{N}_0}$.

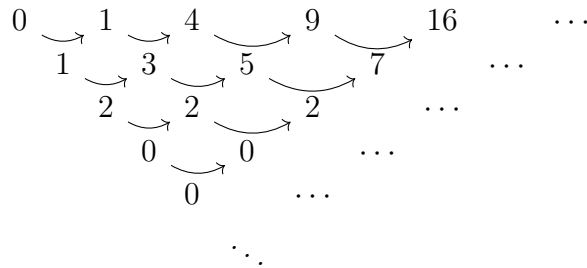
1. Schreiben Sie die Vektoren $a_{0,j}$, $j \in \mathbb{N}_0$ als Linearkombinationen in den Vektoren in B . Tipp: Beginnen Sie erstmal damit, die Aufgabe für $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ zu lösen. Wenn Sie ein Muster sehen, versuchen Sie es mit einem Beweis per Induktion.

²Bonuspunkte zählen *nicht* in die für die 50%-Hürde benötigten Punkte :-)

Wir betrachten nun $V = K[X]$ und $a_{i,0} = X^i$, also $B = (X^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und wir haben bereits gesehen, dass B eine Basis für V ist. Sei $B' := ((X-1)^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$.

2. Zeigen Sie, dass B' eine Basis für $K[X]$ ist. Tipp: Binomische Formel.
3. Schreiben Sie die Vektoren $a_{0,j}$, $j \in \mathbb{N}_0$ als K -Linearkombinationen in der Basis B' . Tipp: Binomische Formel.

Wir betrachten nun $K = \mathbb{Q}$, $V = K$ und $a_{i,0} := f(i)$, wobei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein beliebiges Polynom ist. Das Diagramm sieht dann zum Beispiel für $f = X^2$ so aus:



Vorsicht: hier ist $(0, 1, 4, 9, \dots)$ natürlich *keine* Basis für $V = \mathbb{Q}$! Zeichnen Sie das Diagramm für sich auch zu $f = X^n$ für andere n . Seien

$$W := \langle \{(a_{i,0})_{i \in \mathbb{N}_0} \mid \exists f \in \mathbb{Q}[X] \forall i \in \mathbb{N}_0. a_{i,0} = f(i)\} \rangle \subset \mathbb{Q}^\infty, \quad (4)$$

$$W' := \langle \{(a_{0,j})_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \exists f \in \mathbb{Q}[X] \forall i \in \mathbb{N}_0. a_{i,0} = f(i)\} \rangle \subset \mathbb{Q}^\infty, \quad (5)$$

wobei die $(a_{0,j})_{j \in \mathbb{N}_0}$ wie zuvor durch $a_{i,j+1} = a_{i+1,j} - a_{i,j}$ definiert sind.

4. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen W und W' an.
5. Folgern Sie daraus, dass die Folgen $(i^n)_{i \in \mathbb{N}_0}$, $n \in \mathbb{N}_0$ linear unabhängig sind und sogar eine Basis für W definieren.
6. Finden Sie eine Folge $f \in \mathbb{Q}^\infty \setminus (W \cup W')$. Hinweis: Schauen Sie sich mal Folgen an, die nicht durch Polynomauswertung entstehen wie $(2^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$.