

Übungsblatt 11

Abgabe bis Donnerstag, 23.01.2020 um 12 Uhr
bei den Schließfächern im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Aufgabe 1. (4=1+1+1+1 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 2 \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 1$$

gilt.

2. Geben Sie eine Formel für $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ an und berechnen Sie $f\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.
3. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist und bestimmen Sie $\dim(\text{Kern}(f))$.
4. Geben Sie eine Basis von $\text{Kern}(f)$ an.

Aufgabe 2. (4=2+2 Punkte) Sei V ein K -Vektorraum. Für eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ (auch Endomorphismus von V genannt) schreiben wir $f^2 := f \circ f$.

1. Einen Endomorphismus f von V nennt man idempotent, falls $f^2 = f$ gilt. Zeigen Sie: Ist $f : V \rightarrow V$ idempotent, so folgt

$$V = \text{Kern}(f) \oplus \text{Bild}(f).$$

2. Angenommen es gibt zwei Unterräume $U_1, U_2 \subset V$, sodass $V = U_1 \oplus U_2$. Zeigen Sie: Es existiert ein eindeutig bestimmter idempotenter Endomorphismus $f : V \rightarrow V$, sodass gilt:

$$U_1 = \text{Kern}(f), U_2 = \text{Bild}(f).$$

Aufgabe 3. (8=2+2+2+2 Punkte)

1. Es seien V und W K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Menge der linearen Abbildungen

$$\text{Hom}_K(V, W) := \{f : V \rightarrow W, K\text{-lineare Abbildung}\}$$

wieder ein K -Vektorraum ist.

2. Sei V endlich erzeugt. Der Vektorraum $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$ heißt Dualraum von V . Zeigen Sie:

$$\dim V = \dim V^*.$$

Hinweis: Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\delta_B^i : V \rightarrow K$, definiert durch $\delta_B^i(\sum_{j=1}^n a_j v_j) := a_i$, wohldefinierte lineare Abbildungen sind, und eine Basis B^* (genannt: die zu B duale Basis) von V^* bilden.

3. Sei V weiterhin endlich erzeugt. Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} V &\rightarrow (V^*)^* \\ x &\mapsto (\pi \mapsto \pi(x)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K -Vektorräumen ist.

4. Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von endlich erzeugten K -Vektorräumen. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} f^* : W^* &\rightarrow V^* \\ \phi &\mapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

ist linear. Zeigen Sie ferner, dass f^* surjektiv ist, falls f injektiv ist.