

## Tutoriumsaufgaben zu Blatt 12

### Aufgabe 1

Gegeben sei das Dreieck  $ABC$  im  $\mathbb{R}^3$  mit folgenden Ecken:

$$A = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Dreieck bei  $B$  einen rechten Winkel hat.
- (b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt.
- (c) Zeigen Sie, dass für den Winkel  $\alpha$  bei  $A$  gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{5}.$$

### Aufgabe 2

Auf  $\mathbb{R}^2$  sei eine Bilinearform  $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$H\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) := ad + bc.$$

Untersuchen Sie die Bilinearform auf Symmetrie und positive Definitheit.

### Aufgabe 3

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und zugehöriger Norm  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Zeigen Sie, dass für  $x, y \in V$  die „binomischen Formeln“ gelten:

- (a)  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ ;
- (b)  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ ;
- (c)  $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$ .