

Übungsblatt 12

Abgabe bis Donnerstag, 30.01.2020 um 12 Uhr
bei den Schließfächern im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Aufgabe 1. (4=1+1+2 Punkte) Es bezeichne V einen endlich erzeugten K -Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ einen Endomorphismus von V .

1. Angenommen es existiert eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass $f^n = 0$ die Nullabbildung ist (hier bezeichnet f^n die n -fache Verknüpfung). Dann hat f nur 0 als Eigenwert.
2. Angenommen f ist idempotent (siehe letzter Zettel), mit $f \neq 0$. Ermitteln Sie die Eigenwerte von f .
3. Betrachten Sie den Endomorphismus

$$f : K^{n \times n} \rightarrow K^{n \times n} \\ A \mapsto A^t$$

welcher einer Matrix A ihre transponierte Matrix A^t zuordnet. Ermitteln Sie die Eigenwerte von f sowie die zugehörigen Eigenräume und deren Dimension.

Aufgabe 2. (4=2+2 Punkte)

1. Betrachten Sie eine obere Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & a_2 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass die Diagonaleinträge a_i genau die Eigenwerte von M sind.

2. Betrachten Sie folgende Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 7 & 13 \end{pmatrix}, \text{ und } B = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A und B .

Aufgabe 3. (4 Punkte) Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7x + y - z \\ -x + z \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ sind und ermitteln Sie die Koordinatenmatrix $A(f)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ von f bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Aufgabe 4. (4=3+1 Punkte)

1. Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Sei $K[X]_{\leq 3}$ der K -Vektorraum der Polynome über K vom Grad ≤ 3 und sei

$$D : K[X]_{\leq 3} \rightarrow K[X]_{\leq 3}$$

die formale Ableitung, d.h. $D(\sum_{i=0}^3 a_i X^i) = \sum_{i=1}^3 a_i i X^{i-1}$.

Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $A(D)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ von D bzgl. der Basen

$$\mathcal{B} = (-2, X^2 + X, -3X^2, X^3) \text{ und } \mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3).$$

Beweisen Sie zunächst, dass es sich dabei wirklich um Basen handelt.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von D .