Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
28. Januar 2020

Lineare Algebra L2/L5
Dr. Jonathan Zachhuber
Martin Lüdtke

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ und der Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ seien definiert durch

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 2z = 15 \right\}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Abstand von P zu E.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Stellen Sie E in Hesse-Normalform dar.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien $A, B \in V$ zwei verschiedene Punkte. Sei $M = \frac{1}{2}(A + B)$ der Mittelpunkt und $r = \frac{1}{2}\|B - A\|$. Zeigen Sie, dass für $C \in V$ gilt:

$$\|C - M\|^2 = r^2 + \langle C - A, C - B \rangle.$$

Folgern Sie, dass das Dreieck ABC genau dann einen rechten Winkel bei C hat, wenn C auf dem verallgemeinerten Thaleskreis liegt, d.h. wenn $\|C - M\| = r$ gilt.

Bonusaufgabe (4 Bonuspunkte)

Seien

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zwei Vektoren im dreidimensionalen Raum. Das *Kreuzprodukt* $a \times b$ ist definiert als

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass $a \times b$ zu a und b orthogonal ist.

(b) Zeigen Sie, dass genau dann $a \times b = 0$ gilt, wenn a und b linear abhängig sind.

Abgabe bis **10:00** am **Dienstag, den 4. Februar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.