Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2019/20
30. Januar 2020

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Matti Würthen

Probeklausur zur Linearen Algebra WiSe 19/20

Aufgabe 1. *(12=6+6 Punkte) Betrachten Sie das folgende inhomogene Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} \lambda x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4 &= 8 \\ -\lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -4 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

1. *Für welche reellen Zahlen λ ist die Lösung des Gleichungssystems eindeutig?*
2. *Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses System für $\lambda = -8/12$.*

Aufgabe 2. *(13=5+3+5 Punkte) Sei $k \in \mathbb{R}$ und* $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & -3 \\ 0 & -k & 2 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

1. *Berechnen Sie* $\det(A_k)$ *in Abhängigkeit von k.*
2. *Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist A_k invertierbar?*
3. *Berechnen Sie A_1^{-1}.*

Aufgabe 3. *(12 = 5+3+4 Punkte) Sei* $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. *Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von A.*
2. *Geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist.*
3. *Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4^n-1}{3} \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. *(12=6+6 Punkte) Sei V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum und W_1, W_2, W_3 drei Untervektorräume von V.*

a) Zeigen Sie, dass gilt $(W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3) \subset (W_1 + W_2) \cap W_3$

b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $(W_1+W_2) \cap W_3 \not\subset (W_1 \cap W_3)+(W_2 \cap W_3)$, *indem Sie einen Vektorraum* V *und drei Unterräume* $W_1, W_2, W_3 \subset V$ *angeben, so dass* $(W_1+W_2) \cap W_3$ *nicht in* $(W_1 \cap W_3)+(W_2 \cap W_3)$ *enthalten ist.*

Aufgabe 5. *(16=4+4+4+4 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen (jeweils 4 Punkte):*

1. $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A$ *ist invertierbar*$\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ *ist ein Unterverktorraum.*
2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ist genau dann invertierbar, wenn* 0 *kein Eigenwert ist.*
3. *Für jede lineare Abbildung* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *gilt:* $\mathbb{R}^2 = Kern(f) \oplus Bild(f)$.
4. *Jede Matrix* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *hat einen Eigenwert* $\alpha \in \mathbb{R}$.