

Lösungen zur Probeklausur zur Linearen Algebra WiSe 19/20

Die Lösungen dienen zur Kontrolle, und sind nicht als Musterlösungen zu verstehen.

Aufgabe 1. (12=6+6 Punkte) Betrachten Sie das folgende inhomogene Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lambda x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4 &= 8 \\ -\lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -4 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\end{aligned}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

1. Für welche reellen Zahlen λ ist die Lösung des Gleichungssystems eindeutig?
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses System für $\lambda = -8/12$.

Lösung:

1. Man errechnet:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 4 \\ -\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 12\lambda + 8.$$

Die Lösung ist genau dann eindeutig, wenn die Determinante nicht 0 ist, also genau dann, wenn $\lambda \neq -8/12$.

2. Die Lösungsmenge ist

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -\frac{3}{2}(x_4 - 1); x_2 = -1; x_3 = -(x_4 + 1), \right\}$$

Aufgabe 2. (13=5+3+5 Punkte) Sei $k \in \mathbb{R}$ und $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & -3 \\ 0 & -k & 2 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

1. Berechnen Sie $\det(A_k)$ in Abhängigkeit von k .
2. Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist A_k invertierbar?
3. Berechnen Sie A_1^{-1} .

Lösungen

1. Man erhält $\det(A_k) = -k(k+1)(k+2)$.
2. A_k ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A_k) \neq 0$, also genau dann, wenn $k \neq 0, -1, -2$.
3. Durch Anwenden des Gaußverfahrens erhält man:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (12 = 5+3+4 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von A .
2. Geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist.
3. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4^n-1}{3} \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

Lösungen:

1. Das charakteristische Polynom von A ist $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda)$, d.h. die Eigenwerte sind 1 und 4. Die zugehörigen Eigenräume sind gegeben durch $E_1 = \langle (1, 0)^t \rangle$ und $E_4 = \langle (1, 3)^t \rangle$.

2. Eine Matrix mit Eigenvektoren als Spalten ist gegeben durch $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Man erhält $S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und dann:

$$D := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. $A^n = (SDS^{-1})^n = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4^n-1}{3} \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. (12=6+6 Punkte) Sei V ein endlich-erzeugter K -Vektorraum und W_1, W_2, W_3 drei Untervektorräume von V .

- a) Zeigen Sie, dass gilt $(W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3) \subset (W_1 + W_2) \cap W_3$
- b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $(W_1 + W_2) \cap W_3 \not\subset (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$, indem Sie einen Vektorraum V und drei Unterräume $W_1, W_2, W_3 \subset V$ angeben, so dass $(W_1 + W_2) \cap W_3$ nicht in $(W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$ enthalten ist.

Lösungen:

- Sei $v \in (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$. Dann existiert eine Zerlegung $v = w_1 + w_2$, mit $w_1 \in (W_1 \cap W_3)$ und $w_2 \in (W_2 \cap W_3)$. Da $(W_1 \cap W_3) \subset W_1$ und $(W_2 \cap W_3) \subset W_2$ hat man trivialerweise $v \in W_1 + W_2$. Außerdem sind $w_1, w_2 \in W_3$. Da W_3 ein Unterraum ist, ist dann auch $v = w_1 + w_2 \in W_3$. Also ist $v \in (W_1 + W_2) \cap W_3$.
- Man nehme $V = K^2$ und $W_1 = \langle (1, 0)^t \rangle$, $W_2 = \langle (0, 1)^t \rangle$, $W_3 = \langle (1, 1)^t \rangle$. Dann ist $(W_1 + W_2) \cap W_3 = W_3$, aber $W_1 \cap W_3 + W_2 \cap W_3 = \{0\}$.

Aufgabe 5. (16=4+4+4+4 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen (jeweils 4 Punkte):

- $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist ein Untervektorraum.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert ist.
- Für jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt: $\mathbb{R}^2 = \text{Kern}(f) \oplus \text{Bild}(f)$.
- Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ hat einen Eigenwert $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösungen

- Falsch. Zb ist die Nullmatrix, d.h. das neutrale Element in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, nicht enthalten.
- Wahr. A ist genau dann invertierbar, wenn der Kern der linearen Abbildung $v \mapsto Av$ trivial ist. Das ist aber wiederum genau dann der Fall, wenn 0 kein Eigenwert ist.
- Falsch. Betrachte die lineare Abbildung $\lambda_A : v \mapsto Av$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\text{Bild}(\lambda_A) = \text{Kern}(\lambda_A)$.
- Falsch. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat charakteristisches Polynom $\lambda^2 + 1$, welches in $\mathbb{R}$ nicht lösbar ist.