

Übungsblatt 14

Von den 20 zu erreichenden Punkten gelten 4 als Bonuspunkte.

Aufgabe 1 (4 = 1+1+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie in S_5 die Verknüpfung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie das Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_6.$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Sei $\tau \in S_n$ die Permutation

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \tau(x) = x \text{ für } x \neq i, j.$$

Zeigen Sie, dass $U := \{\text{id}, \tau\}$ eine Untergruppe von S_n ist.

Aufgabe 2 (5 = 2+2+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ isomorph zur Untergruppe $\{1, -1, i, -i\}$ von \mathbb{C}^* ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe (\mathbb{C}^*, \cdot) isomorph zu folgender Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ ist:

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

(c) Bestimmen Sie eine Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$, die isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3 (6 = 1+1+2+2 Punkte)

Sei $\text{Aff}^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}[X]$ die Menge der Polynome der Form $aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für $f(X), g(X) \in \text{Aff}^1(\mathbb{R})$ auch die Komposition

$$(f \circ g)(X) := f(g(X))$$

$(g(X)$ eingesetzt in f) ein Element von $\text{Aff}^1(\mathbb{R})$ ist.

(b) Die Menge $\text{Aff}^1(\mathbb{R})$ bildet mit der Verknüpfung \circ eine Gruppe. Geben Sie das neutrale Element an und bestimmen Sie das Inverse zu $f(X) = aX + b$.

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Menge eine Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ bildet:

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

(d) Zeigen Sie, dass die Gruppen $\text{Aff}^1(\mathbb{R})$ und U isomorph sind.

Aufgabe 4 (5 = 1+1+1+2 Punkte)

Sei $\mathbb{R}[X]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der \mathbb{R} -Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 , und sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(f) := \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $D_{E,B}(\varphi)$ von φ bezüglich der Standardbasis E von \mathbb{R}^3 und der Basis $B = (1, X, X^2)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$.
- Zeigen Sie, dass φ bijektiv ist.
- Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $D_{B,E}(\varphi^{-1})$ der inversen Abbildung.
- Geben Sie für allgemeine $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ein Polynom $f(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ an, so dass gilt:

$$f(0) = b_0, \quad f(1) = b_1, \quad f(2) = b_2.$$

Zusatzaufgabe

Finden Sie die angegebenen 6 Begriffe aus der Vorlesung und stellen Sie sicher, dass Sie alle Begriffe definieren und verwenden können.

H	H	A	Y	T	U	A	X	L	K	H	S	L	U	E	N	A	L	J
Z	Y	O	N	Z	W	V	M	G	R	I	P	G	R	U	P	P	E	H
O	F	F	P	S	E	M	B	O	V	A	T	E	I	W	F	C	D	S
S	Y	M	M	E	T	R	I	S	C	H	E	G	R	U	P	P	E	G
G	R	K	K	U	O	E	Y	D	Y	J	Q	G	J	I	F	U	U	B
R	U	X	U	A	L	O	M	Q	I	A	D	N	N	O	S	N	Z	R
V	Z	V	Z	B	Q	B	R	V	C	B	N	K	S	U	T	E	B	K
H	A	C	H	E	B	D	I	Y	I	U	F	T	M	E	D	P	X	X
G	M	K	Y	L	I	G	E	I	F	N	S	S	R	B	J	G	Q	H
F	M	B	K	S	E	A	X	W	C	Q	I	G	J	C	G	J	G	P
O	H	B	X	C	H	L	V	P	Q	H	R	S	A	A	J	B	N	P
N	K	D	H	H	B	N	O	O	P	U	Z	H	X	H	I	M	W	T
R	X	K	W	D	Y	Z	K	R	P	T	T	F	H	O	Z	Z	E	B
C	A	E	G	P	H	H	O	P	D	J	S	J	I	B	I	G	Y	P
K	M	Z	Y	L	H	M	E	U	S	J	R	P	T	G	K	U	Z	B
R	Q	J	N	O	O	D	Q	C	A	X	H	U	B	M	Q	H	N	O
P	X	W	M	M	Y	F	P	B	F	G	C	V	D	V	D	A	I	I
M	J	X	O	I	S	O	M	O	R	P	H	I	S	M	U	S	Z	R
Z	V	H	C	M	S	B	I	H	A	R	S	X	T	X	J	W	P	R

ABELSCH
 GRUPPE
 HOMOMORPHISMUS
 ISOMORPHISMUS
 SYMMETRISCHEGRUPPE
 UNTERGRUPPE

Abgabe bis 10:00 am Dienstag, den 11. Februar in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.