

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 14

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind:

- (a) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2$;
- (b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g(n) = 2^n$;
- (c) $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$, $h(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Bei welcher der folgenden Teilmengen handelt es sich um Untergruppen?

- (a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$;
- (b) $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R}^*$;
- (c) $\mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$;
- (d) $\{\sigma \in S_5 \mid \sigma(5) = 5\} \subseteq S_5$;
- (e) $\{[0], [2], [4]\} \subseteq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, was die Gruppenverknüpfung ist.

Aufgabe 3

Sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}^*, a_{12} \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gruppen S_4 und $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.